



دکتر احمد خونساری

پردازش اطلاعات کوانتومی

پاییز ۱۴۰۲



ارائه ۴

در این ارائه شما با تعدادی از مفاهیم مهم در مکانیک کوانتوم آشنا خواهید شد که در نهایت به شما کمک می‌کنند شهود بهتری نسبت به مفهوم اطلاعات کوانتومی بدست بیاورید. به صورت خاص، در این ارائه ابتدا بحث خواهیم کرد که چه مقدار اطلاعات کلاسیک (غیر کوانتومی صفر و یک) را می‌توان از یک حالت کوانتومی استخراج کرد و سپس به تعدادی قضیه می‌پردازیم که امکان‌پذیر بودن یا نبودن برخی عملیات‌ها را مورد بحث قرار می‌دهند. اسلایدهای شماره ۲ و ۳ را ببینید.

در اسلاید ۴ می‌بینید که اگر بخواهیم یک کیوبیت که  $|0\rangle$  و  $|1\rangle$  است را اندازه بگیریم کافی است از پایه‌های محاسباتی استفاده کنیم. در واقع چنین کیوبیتی که به صورت مطلق یا در حالت  $|0\rangle$  قرار دارد و یا در حالت  $|1\rangle$  قرار دارد معادل یک بیت اطلاعات کلاسیک است.

در اسلاید ۵ نیز مشاهده می‌کنید که هرگاه یک کیوبیت در مجموعه حالت‌هایی باشد که از طریق تبدیل‌های ماتریسی قابل تبدیل به  $|0\rangle$  و  $|1\rangle$  باشند نیز می‌توان اطلاعات آنها را به صورت کامل با اندازه‌گیری در پایه‌های محاسباتی اندازه‌گیری کرد. معمولاً به جای اینکه ابتدا تبدیلی بر روی کیوبیت اعمال شود و سپس در پایه‌های محاسباتی اندازه‌گیری شود، گفته می‌شود که حالت کیوبیت را در مجموعه‌ای از پایه‌ها اندازه‌گیری می‌کنیم که بتوانند حالت کیوبیت را به صورت کامل مشخص کنند. به این ترتیب این دو نحوه بیان از نظر نتیجه با یکدیگر معادل هستند. در اسلاید ۶ به کیوبیت‌هایی می‌پردازیم که در حالت‌هایی قرار می‌گیرند که متعامد نیستند. در این شرایط هیچ اندازه‌گیری وجود ندارد که بتواند به ما بگوید کیوبیت در کدام حالت است. در این شرایط ما تنها می‌توانیم با استفاده از اندازه‌گیری احتمال اینکه کیوبیت در هر کدام از حالت‌ها بوده باشد را بدست بیاوریم. توجه کنید که هرچقدر حالت‌های غیرمتعامد یک کیوبیت به یکدیگر نزدیک‌تر باشند، تشخیص آنها از یکدیگر سخت‌تر می‌شود.

در اسلاید ۷ با کران Helstrom-Holevo آشنا می‌شوید. این کران حداکثر احتمال تشخیص حالت یک کیوبیت وقتی که حالت‌های آن بر هم عمود نباشند را مشخص می‌کند. به صورت خاص، اگر یک کیوبیت در یکی از حالت‌های  $a$  و  $b$  باشد به صورتی که قدر مطلق حاصل ضرب داخل این دو حالت با کسینوس یک زاویه مثل  $\theta$  قابل بیان باشد، آنگاه حداکثر احتمال تشخیص صحیح حالت کیوبیت  $\frac{1}{2}(1 + \sin \theta)$  است. توجه کنید که  $t$  در واقع زاویه بین بردارهای حالت  $a$  و  $b$  را نشان می‌دهد و هرچقدر که  $\theta$  به سمت ۰ برود، سینوس  $\theta$  هم به سمت ۰ حرکت می‌کند. به این ترتیب احتمال تشخیص به  $\frac{1}{2}$  نزدیک می‌شود. این یعنی اینکه حاصل اندازه‌گیری ما به حاصل حدس نزدیک می‌شود. در واقع نمی‌توانیم اطلاعاتی از حالت کیوبیت استخراج کنیم. از طرفی اگر  $\theta$  برابر ۹۰ درجه باشد (یعنی  $a$  و  $b$  بر هم عمود

باشند) کران مذکور برابر ۱ می‌شود. یعنی امکان دارد که با احتمال یک حالت کیوبیت را مشخص کنیم که با توضیحات شهودی که در اسلایدهای ۴ تا ۶ ارائه کردیم همخوانی دارد. در انتهای اسلاید می‌بینید که اگر پایه‌های اندازه‌گیری را به ترتیب توضیح داده شده انتخاب کنیم همواره می‌توان به کران Helstrom-Holevo برای تشخیص حالت کیوبیت دست پیدا کرد.

در اسلاید ۸ یک مثال را مشاهده می‌کنید. فرض کنید که یک کیوبیت در اختیار داریم که یا در حالت  $|0\rangle$  است و یا در حالت  $|+\rangle$ . می‌دانیم که این دو حالت بر هم عمود نیستند. در میانه اسلاید ملاحظه کنید که چگونه بردارهای پایه اندازه‌گیری محاسبه شده‌اند. در انتهای اسلاید نیز کران Helstrom-Holevo محاسبه شده است.

در اسلاید ۹ می‌بینید که اگر حالت‌های  $|0\rangle$  و  $|+\rangle$  را در پایه‌های محاسباتی اندازه‌گیری کنیم، احتمال مشاهده ۰ و ۱ به چه صورت است. این احتمالات را با استفاده از روش‌های معرفی شده در ارائه قبلی می‌توانید بدست بیاورید. دقت کنید که کیوبیت با احتمال  $\frac{1}{2}$  در حالت  $|0\rangle$  است و با احتمال  $\frac{1}{2}$  در  $|+\rangle$  است. وقتی که در  $|0\rangle$  است، اگر در پایه‌های محاسباتی اندازه‌گیری شود، خروجی هیچ وقت ۱ نمی‌شود. اگر کیوبیت در حالت  $|+\rangle$  باشد، با احتمال برابر ممکن است ۰ و ۱ شود. بنابراین در  $\frac{1}{4}$  زمان‌ها ما نتیجه می‌گیریم که کیوبیت در حالت  $|+\rangle$  بوده است و در  $\frac{3}{4}$  زمان‌ها نتیجه می‌گیریم که کیوبیت در حالت  $|0\rangle$  بوده است. بنابراین  $\frac{1}{4}$  احتمال خطا و  $\frac{3}{4}$  احتمال موفقیت در این اندازه‌گیری وجود دارد. که این احتمال موفقیت از کران احتمال موفقیت که در اسلاید قبلی محاسبه کردیم کمتر است.

در اسلاید ۱۰ رابطه بین پایه‌های اندازه‌گیری و حالت‌های کیوبیت را ملاحظه می‌کنید. برای رسیدن به حالت بهینه تشخیص حالت‌ها باید پایه‌های اندازه‌گیری را به صورت سمت چپ مشخص کرد. در شکل سمت راست، گرچه یکی از پایه‌های اندازه‌گیری در راستای یکی از حالت‌های کیوبیت است و آن حالت را کامل تشخیص می‌دهیم، اما احتمال تشخیص سراسری کمتر از حالت بهینه است. در واقع مثالی از این روش را در اسلاید قبلی دیدیم که یکی از پایه‌های محاسباتی (یعنی  $|0\rangle$ ) با یکی از حالت‌های کیوبیت برابر بود. اما این پایه‌ها احتمال تشخیص حداکثری را فراهم نکردند و به کران Helstrom-Holevo نرسیدیم.

در اسلاید ۱۱ یک توضیح مختصر از روش‌های دیگر اندازه‌گیری را ملاحظه می‌کنید که به آن روش تشخیص غیرمبهم گفته می‌شود. در این روش خروجی اندازه‌گیری حتماً با حالت کیوبیت برابر است. یعنی خطای اندازه‌گیری نداریم. اما یک حالت دیگر نیز وجود دارد که حاصل اندازه‌گیری هیچ خروجی به ما نمی‌دهد و هیچ اطلاعاتی از حالت کیوبیت حاصل نمی‌شود. توضیح این روش و نحوه پیاده‌سازی آن از حوزه درس خارج است و به همین دلیل به همین مقدار توضیحات در مورد این روش اکتفا می‌شود.

## ۱ اصل عدم امکان سیگنال دهی

در ارائه‌های پیشین ملاحظه کردید که مفهوم «درهم تنیدگی» در مکانیک کوانتوم وجود دارد و امکان آن پذیرفته شده است. همچنین دیدیم که تحت شرایط خاص به نظر می‌رسید که ارتباط کیوبیت‌های درهم تنیده با سرعتی بیشتر از

سرعت نور انجام می‌گیرد. حال این سؤال مطرح می‌شود که آیا می‌توان از این خاصیت استفاده کرد تا با سرعتی بیش از سرعت نور اطلاعات را انتقال داد؟ «اصل عدم امکان سیگنال‌دهی» بیان می‌کند که این مسئله امکان‌پذیر نیست. اسلاید شماره ۱۲ را ببینید.

در اسلاید ۱۳ یک مثال را ملاحظه می‌کنید که تحت آن بررسی می‌کنیم که امکان استفاده از کیوبیت‌های درهم تنیده برای انتقال اطلاعات به چه صورت است. فرض کنید آلبرت و نیلز در فاصله‌ی بسیار دوری از یکدیگر قرار دارند و هر کدام یک کیوبیت در اختیار دارند که در واقع یک جفت کیوبیت درهم تنیده را تشکیل می‌دهند. هر زمان که آلبرت کیوبیت خودش را اندازه‌گیری کند، کیوبیت نیلز هم مقدار قطعی پیدا می‌کند (اصطلاحاً دچار فروشکست یا collapse می‌شود). سؤال اینجاست که آیا نیلز می‌تواند تشخیص دهد که آلبرت کیوبیت خودش را اندازه‌گیری کرده است یا نه؟ اگر نیلز بتواند این کار را انجام بدهد، آلبرت از این طریق می‌تواند رخداد یا عدم رخداد یک حادثه را به نیلز اطلاع دهد. به این ترتیب که هر گاه آن حادثه در سمت آلبرت اتفاق بیفتد او کیوبیت خودش را اندازه‌گیری می‌کند. حال اگر نیلز به کیوبیت خودش نگاه کند و متوجه شود که آلبرت کیوبیت خودش را اندازه‌گیری کرده است، نیلز متوجه می‌شود که حادثه مذکور در سمت آلبرت رخ داده است. تنها راهی که نیلز برای اطلاع از وضعیت کیوبیت دارد این است که آن را اندازه بگیرد و تنها شرایطی که او بتواند از کیوبیت آلبرت کسب اطلاع کند این است که اندازه‌گیری آلبرت بر احتمال مشاهدات نیلز تأثیر گذاشته باشد.

در اسلاید ۱۴ می‌بینیم که اندازه‌گیری آلبرت احتمال مشاهدات نیلز را تغییر نمی‌دهد. توجه کنید که وقتی کیوبیت نیلز دچار فروشکست نشده است، احتمال مشاهده خروجی ۰ یا ۱ برای او برابر 0.5 است. حال اگر آلبرت اندازه‌گیری را انجام دهد، کیوبیت نیلز با احتمال 0.5 به ۰ یا ۱ فرو می‌شکند. اما اگر اطلاع دیگری از سمت آلبرت به نیلز نرسد، نیلز مقداری که آلبرت مشاهده کرده است را متوجه نمی‌شود. به این ترتیب برای او احتمال مشاهده ۰ و ۱ تغییری نمی‌کند. به بیان دیگر، احتمال مشاهده یک کیوبیت اندازه‌گیری نشده و یا یک کیوبیت اندازه‌گیری شده در حالت‌های ۰ و ۱ برای نیلز برابر است و هر قدر کیوبیت‌های درهم تنیده را مشاهده کند نمی‌تواند از نظر آماری بین آنها فرقی قائل شود و به این ترتیب از طریق کیوبیت‌های درهم تنیده نمی‌تواند از سمت آلبرت اطلاع پیدا کند. از آنجا که احتمال مشاهدات نیلز با اندازه‌گیری آلبرت تغییر نمی‌کند، انتقال اطلاعات غیرممکن است و اصل عدم امکان سیگنال‌دهی اثبات می‌شود.

## ۲ اصل عدم امکان ایجاد نسخه دوم

این اصل بیان می‌کند که امکان ندارد از یک کیوبیت یک نسخه دوم تهیه کرد، بدون اینکه حالت آن کیوبیت را تغییر داد. توجه کنید که این اصل مبحث تصحیح خطا در محاسبات کوانتومی را در مقایسه با محاسبات کلاسیک پیچیده‌تر می‌کند، چرا که بسیاری از روش‌های مقابله با خطا و بازیابی از خطا در محاسبات کلاسیک مبتنی بر تهیه کپی و ایجاد افزونگی هستند. اگر ایجاد نسخه دوم از یک کیوبیت امکان‌پذیر بود، اصل عدم سیگنال‌دهی نقض می‌شد. به یک بیان

ساده: نیلز می‌تواند از کیوبیت خودش ۱۰۰ نسخه کپی تهیه کند. حال تمام ۱۰۰ نسخه را اندازه‌گیری می‌کند. اگر آلبرت قبلاً اندازه‌گیری را انجام داده باشد، نتیجه تمام ۱۰۰ اندازه‌گیری در سمت نیلز یکسان است. اما اگر آلبرت اندازه‌گیری را انجام نداده باشد، احتمال مشاهده ۰ و ۱ برابر است و تعداد آنها به هم نزدیک است. همچنین، اگر ایجاد نسخه دوم از یک کیوبیت امکان‌پذیر بود، می‌توانستیم بی‌نهایت اطلاعات کلاسیک را به صورت کوانتومی از طریق یک کیوبیت منتقل کنیم. توضیحات اسلاید شماره ۱۵ را مطالعه کنید.

در اسلاید ۱۶ و ۱۷ به صورت رسمی‌تر می‌بینید که ایجاد نسخه دوم امکان‌پذیر نیست. به صورت خاص، فرض کنید دو کیوبیت دلخواه  $\phi$  و  $\psi$  را در اختیار داریم و با استفاده از عملگر  $U$  از هر دوی این کیوبیت‌ها یک نسخه دوم تهیه کرده باشیم. سپس از خاصیت یکانی بودن  $U$  استفاده می‌کنیم و نشان می‌دهیم که امکان ندارد  $\phi$  و  $\psi$  دلخواه بوده باشند، بلکه برای اینکه عملیات جبری حاصل از عملگر یکانی صحیح باشد این دو کیوبیت یا برابر بوده‌اند و یا بر هم عمود بوده‌اند. به این ترتیب فرض اولیه دلخواه بودن  $\psi$  و  $\phi$  نقض می‌شود. بنابراین فرض اینکه عملگر یکانی  $U$  وجود دارد که می‌تواند از کیوبیت‌ها نسخه دوم تهیه کند باطل می‌شود. شایان ذکر است گرچه تهیه نسخه دوم به صورت کامل امکان‌پذیر نیست، اما پژوهش‌هایی در راستای ایجاد نسخه دوم تقریبی انجام شده است.

### ۳ اصل عدم امکان حذف

این اصل در واقع از اصل عدم امکان ایجاد نسخه دوم بدست می‌آید چراکه عملگرهای کوانتومی (به غیر از اندازه‌گیری) معکوس‌پذیر (reversible) نیز هستند (در این مورد در ارائه‌های آینده بیشتر مطالعه خواهیم کرد). بنابراین امکان پذیر بودن و یا نبودن یک عملیات همواره امکان‌پذیر بودن و یا نبودن برعکس آن را نیز اثبات می‌کند. اسلاید ۱۸ را ببینید.