ارائه ۵	پردازش اطلاعات کوانتومی پاییز ۱۴۰۲	دکتر احمد خونساری

در این ارائه با مدل «مدارهای کوانتومی» آشنا می‌شوید. این مدل به ما اجازه می‌دهد که از رفتارهای کوانتومی به عنوان یک ماشین محاسبه‌گر استفاده کنیم. این نگاه در نهایت به ما کمک می‌کند که بتوانیم یک کامپیوتر کوانتومی را طراحی کنیم. البته مدل‌های دیگری نیز وجود دارند که در صورت امکان از طریق محتواهای تکمیلی به آنها پرداخته خواهد شد.

پیشتر در مبحث مفروضات مکانیک کوانتوم دیدید که سیستم‌های بسته کوانتومی طبق معادله شرودینگر تغییر حالت می‌دهند که تحت ماتریس‌های یکانی توانستیم آنها را تا حدی بررسی کنیم. اما وقتی که بخواهیم یک کامپیوتر کوانتومی درست کنیم سیستم نهایی «بسته» نخواهد بود، چرا که نیاز داریم رفتارهای آن را در مواقع مشخص کنترل کنیم. به این ترتیب تمام رفتارهای یک کامپیوتر کوانتومی با معادله شرودینگر مدل‌سازی نمی‌شود. برای اینکه این تفاوت در مدل‌سازی لحاظ شود و تأثیرات آن در نظر گرفته شود مفهوم «سیستم‌های کوانتومی دارای اختلال (noise)» را معرفی خواهیم کرد. اسلاید شماره ۲ را ببینید.

در اسلاید شماره ۳ ملاحظه می‌کنید که در کنار مدل «ماتریسی» که پیش‌تر با آن آشنا شدید (فرض چهارم مکانیک کوانتوم در اسلاید ۳ را ببینید) می‌توان یک مدل دیگر را نیز برای تغییر حالت سیستم‌های کوانتومی متشکل از کیوبیت در نظر گرفت. این مدل از تعدادی سیم و تعدادی gate ایجاد می‌شود. هر سیم نمایشگر یک کیوبیت است و هر gate یک عملیات کوانتومی را نشان می‌دهد. مثلاً عملیات ماتریسی مطرح‌شده در میانه اسلاید را می‌توان با استفاده از سیم و gate به صورت شماتیک در پایین اسلاید نمایش داد. ابتدای اسلاید شماره ۴ را ملاحظه کنید. در ادامه اسلاید شماره ۴ با تعدادی از gate های کوانتومی به صورت شماتیک آشنا می‌شوید. در ارائه شماره ۳ با ماتریس‌های پاولی، هادامارد و CNOT آشنا شدید. در اینجا علاوه بر آنها با gate فاز نیز آشنا می‌شوید که فرم ماتریسی آن نیز ارائه شده است. ملاحظه کنید که به غیر از CNOT که بر دو کیوبیت عمل می‌کند، سایرین بر یک کیوبیت عمل می‌کنند.

در اسلاید شماره ۵ به صورت دقیق‌تر با مفهوم «مدار کوانتومی» آشنا می‌شوید. در یک مدار کوانتومی سه «مرحله» وجود دارد. در مرحله اول تمام کیوبیت‌ها در حالت $|0\rangle$ به مدار وارد می‌شوند. در مرحله دوم تعدادی gate قرار دارند که بر روی کیوبیت‌ها تغییراتی اعمال می‌کنند و آنها را از حالتی به حالت دیگر منتقل می‌کنند. این gate ها مطابق فرض دوم مکانیک کوانتوم تبدیل‌هایی هستند که به وسیله ماتریس‌های «یکانی» قابل نمایش هستند. در مرحله آخر نیز «اندازه‌گیری» در پایه‌های محاسباتی صورت می‌گیرد.

در اسلاید ۶ می‌بینید که اگر محاسبات و مقداردهی اولیه $\langle 0|$ را نادیده بگیریم، تمام یک مدار کوانتومی را می‌توان به صورت یک ماتریس یکانی نمایش داد. برای اینکه از روی مدل مداری، ماتریس را به دست بیاوریم کافی است که دو قانون ساده را دنبال کنیم. (۱) هرگاه چند gate بر روی چند سیم اعمال شده باشند، می‌توان با استفاده از ضرب تانسوری آن‌ها را مجتمع کرد. (۲) برای اینکه gate هایی که پشت سر هم بر کیوبیت‌ها اعمال شده‌اند را تجمیع کنیم باید از سمت راست به چپ معادل ماتریسی آن‌ها را در هم ضرب ماتریسی کرد. به مثال میانه اسلاید نگاه کنید. پرانتز اول گام آخر مدار را نشان می‌دهد که در آن بر روی کیوبیت اول gate هادامارد اعمال شده است و بر روی دو کیوبیت بعدی هیچ عملیاتی انجام نشده است. به این ترتیب در داخل پرانتز از ضرب تانسوری استفاده شده است. این کار برای هر گام تکرار شده است. سپس حاصل گام‌ها از سمت راست به چپ در هم ضرب ماتریسی شده‌اند. با مطالعه این مثال سعی کنید معادل بودن فرم ماتریسی و مداری را به صورت کامل متوجه شوید.

در اسلاید شماره ۷ و ۸ ملاحظه می‌کنید که مدل مداری معرفی‌شده به صورت کامل مدل مستخرج از فرضیات مکانیک کوانتوم را پوشش می‌دهد. به صورت خاص، سیم‌ها همان کوبیت‌ها هستند که در واقع در هر گام حالت سیستم را نشان می‌دهند. توجه کنید که سیم‌ها نیز می‌توانند در حالت درهم‌تنیدگی نیز قرار بگیرند (فرض اول و چهارم). gateها تغییر تحولات کوانتومی را مطابق معادله شرودینگر و ماتریس‌های یکانی اعمال می‌کنند و از فرض دوم پیروی می‌کنند. می‌توان سیم‌ها را در پایه‌های محاسباتی اندازه‌گیری کرد. توجه کنید که اثبات شده است که می‌توان هر محاسبه‌ی کوانتومی را به گونه‌ای تبدیل به یک مدار کوانتومی کرد که اندازه‌گیری در مرحله سوم و آخر رخ بدهد. ضمناً توجه کنید که فرض اینکه کیوبیت‌ها در حالت $\langle 0|$ به مدار وارد می‌شوند از کلیت مدل مداری نمی‌کاهد. بنابراین هر عملیاتی که از مکانیک کوانتوم استفاده می‌کند را می‌توان به صورت مداری نمایش داد. در اسلاید ۸ به دو نکته دیگر پرداخته می‌شود. (۱) محاسبات کوانتومی محاسبات کلاسیک را گسترش می‌دهند و بنابراین هر محاسبه‌ای که بر روی کامپیوترهای کلاسیک انجام می‌گیرد را می‌توان بر روی کامپیوترهای کوانتومی نیز انجام داد. (۲) کامپیوترهای کوانتومی «تز چرچ-تورینگ» را نقض نمی‌کنند. یعنی هر مسئله‌ای که بر روی کامپیوترهای کوانتومی «قابل حل» است، با استفاده از کامپیوترهای کلاسیک نیز «قابل حل» است. گرچه ممکن است «کارامدی محاسبات» تفاوت داشته باشد (یعنی یک محاسبه بر روی کامپیوتر کوانتومی «بسیار سریع‌تر» از کامپیوتر کلاسیک به نتیجه برسد). در این مورد در آینده ذیل محبث پیچیدگی بیشتر بحث خواهیم کرد.

در اسلاید شماره ۹ می‌بینید که محدودیت‌های فیزیکی مانع از این می‌شود که بتوان به صورت همزمان و طی یک gate بر روی چندین کیوبیت عملیات انجام داد. به صورت خاص معمولاً در مدل مداری فرض می‌شود که هر gate یک یا دو ورودی دارد. یعنی، یک مدار کوانتومی ممکن است تعداد بسیار زیادی کیوبیت ورودی داشته باشد، اما محاسبات به صورت گام به گام و از طریق gateهایی با ورودی یک یا دو کیوبیت صورت می‌گیرد. شکل پایین اسلاید را ملاحظه کنید. اثبات شده است که محاسبات دوکیوبیتی یکانی جهان‌شمول و فراگیر هستند (universal). یعنی هر عملیاتی که بر روی هر تعداد کیوبیت قابل انجام باشد را می‌توان از طریق اعمال gateهای دو ورودی انجام داد. به

خاطر بیاورید که در درس مدارهای منطقی خواندید که gateهای NAND و NOR فراگیر هستند. یعنی هر تابع منطقی بر روی n بیت را می‌توان با استفاده از gateهای دو ورودی NAND و NOR پیاده‌سازی کرد. در مورد اینکه gateهای فراگیر کوانتومی چه هستند بعداً بحث خواهیم کرد.

در اسلاید شماره ۱۰ به قید فیزیکی مجاورت کیوبیت‌ها می‌پردازیم. این قید ما را مجبور می‌کند که وقتی می‌خواهیم محاسباتی متشکل از دو کیوبیت را انجام دهیم آن دو کیوبیت را در همسایگی یکدیگر قرار دهیم. در این اسلاید یک مثال آورده شده است. فرض کنید می‌خواهیم یک عملیات دو کیوبیتی (مانند CNOT) را بر روی کیوبیت‌های ۱ و ۳ انجام دهیم. در این صورت لازم است که مثلاً جای کیوبیت ۱ و ۲ را عوض کنیم تا کیوبیت‌های ۱ و ۳ به صورت فیزیکی در همسایگی یکدیگر قرار بگیرند. برای دستیابی به این هدف از یک gate به نام SWAP استفاده می‌شود که نماد آن در بالای اسلاید شماره ۱۱ نمایش داده شده است. فرم ماتریسی این gate نیز در بخش پایینی اسلاید آورده شده است. توجه کنید که جای بتا و گاما عوض شده است و به این معنی است که جای حالت‌های ۰۱ و ۱۰ عوض شده، یعنی جای کیوبیت‌ها با هم عوض شده است.

در جلسه پیشین به اهمیت عملگر جابه‌جاگر SWAP از نظر فیزیکی پرداختیم. اما معمولاً در طراحی و ثبت مدارهای کوانتومی از درج آن پرهیز می‌کنیم تا از شلوغی بیش از دوری کنیم. به طور مثال، در شکل میانه اسلاید ۱۲ می‌بینید که یک CNOT gate بر روی دو سیم غیرهمجوار اعمال شده است. توجه کنید که اگر بخواهیم معادل ماتریسی این مدار را بدست بیاوریم، می‌توانیم ابتدا سیم‌های دوم و سوم را جابه‌جا کنیم. سپس CNOT را بر سیم‌های اول و دوم اعمال کنیم. در نهایت، دوباره سیم‌های دوم و سوم را به جای اصلی خودشان برمی‌گردانیم. به این ترتیب فرم ماتریسی در پایین اسلاید ۱۲ قابل مشاهده است.

در ارائه قبلی بیان کردیم که هر ماتریس یکانی با ابعاد دلخواه را می‌توان از طریق عملگرهای یک و دو کیوبیتی پیاده‌سازی کرد. توجه کنید که مجموعه عملگرهای (ماتریس‌ها) یکانی که درایه‌های عدد مختلط دارند یک طیف پیوسته را پوشش می‌دهند و طبیعتاً نمی‌توان با استفاده از یک مجموعه متناهی گسسته آن‌ها را به صورت کامل پوشش داد. اما نشان داده شده است که با استفاده از یک مجموعه گسسته و متناهی می‌توان هر عملگر یکانی را تقریب زد. مقصود از تقریب زدن یک عملگر یکانی این است که بتوانیم نتیجه‌ی اندازه‌گیری را از نظر آماری یکسان نگه داریم. یعنی «احتمال» مشاهده هر خروجی ناشی از اندازه‌گیری پس از اعمال عملگر اصلی و تقریبی از حد مشخصی به یکدیگر نزدیک باشند. بخش ۳.۵.۴ کتاب مرجع اصلی را مطالعه کنید. قضیه Solovay-Kitaev بیان می‌کند که هر عملگر تک ورودی یکانی را می‌توان با استفاده از $O(\log^c(1/\epsilon))$ gate گسسته تقریب زد (با دقت epsilon) که c یک ثابت نزدیک به عدد ۲ است. به این ترتیب، این قضیه این نتیجه را به دست می‌دهد که مداری که در آن از m CNOT gate و تعداد دلخواهی از عملگرهای پیوسته تک ورودی استفاده شده باشد را می‌توان با استفاده از $O(m\log^c(m/\epsilon))$ gate گسسته با دقت ϵ تقریب زد. این رابطه polylogarithmic برای هر گونه کاربردی معقول و قابل حصول است. اسلاید شماره ۱۳ و پیوست شماره ۳ کتاب مرجع اصلی را ببینید.

در اسلاید شماره ۱۴ می‌بینید که یک مجموعه گسسته ۳ تایی از gateهای یک و دو ورودی برای داشتن یک مجموعه فراگیر (universal) کافی است. با دو مورد از این gateها پیش از این آشنا شده‌اید: CNOT و H. Gate سوم هم که با نماد T نشان داده می‌شود در بالای صفحه ۱۴ نمایش داده شده است. این مسئله به این معنی است که اگر یک مدار شامل m CNOT و تعداد دلخواهی از gateهای تک ورودی داشته باشیم، می‌توان با دقت دلخواه آن را با استفاده از این مجموعه متناهی تقریب زد. در میانه صفحه با اهمیت T gate آشنا می‌شوید و متوجه می‌شوید که اگر این gate را کنار بگذاریم، عملیات gate های معرفی شده قبلی قابل شبیه‌سازی به صورت کارآمد بر روی کامپیوترهای کلاسیک است. این قضیه تحت نام Gottesman-Knill شهرت دارد. برای مطالعه بیشتر صفحه ۴۶۴ کتاب مرجع اصلی را ببینید. در پایین اسلاید ۱۴ نیز می‌بینند که چگونه می‌توان با استفاده از gate های فراگیر سایر عملگرها قبل پیاده‌سازی شدن هستند. در اسلاید ۱۵ می‌بینید که چگونه می‌توان با H و CNOT دو کیوبیت را در حالت درهم‌تنیده قرار داد.

در اسلاید ۱۶ مدل مداری کوانتومی را با مدل مدارهای منطقی کلاسیک مقایسه می‌کنیم و ملاحظه می‌کنید که دو تفاوت اصلی وجود دارد: (۱) تعداد ورودی‌ها و خروجی‌ها در مدل کوانتومی یکسان است، اما در مدل کلاسیک این قید لزوماً برقرار نیست. (۲) در مدل کوانتومی، چون عملگرها یکانی هستند، عملیات معکوس‌پذیر است. اما این قید در مدل کلاسیک وجود ندارد. در اسلاید ۱۷ عملیات AND منطقی را مورد بررسی بیشتر قرار می‌دهیم. اگر بخواهیم به این عمل در مدل کوانتومی دست پیدا کنیم باید بتوانیم آن را به صورت برگشت‌پذیر طراحی کنیم. در این اسلاید ملاحظه می‌کنید که صرفاً اضافه کردن یک خروجی به مدار منطقی اجازه نمی‌دهد که عملیات را معکوس‌پذیر کنیم. چرا که سه حالت متفاوت وجود دارند که خروجی AND برابر صفر است اما با یک خروجی اضافه (یک بیت اضافی) نمی‌توان آن‌ها را از هم تمیز داد.

در اسلاید ۱۸ می‌بینید که برای پیاده‌سازی عملیات AND برگشت‌پذیر باید از سه ورودی و سه خروجی استفاده کرد، به این Toffoli gate می‌گویند. نماد این gate و نمایش ماتریسی آن در میانه اسلاید ۱۸ آمده است. در این مدل، دو کیوبیت اول و دوم، کیوبیت سوم (کیوبیت هدف) را کنترل می‌کنند. به این معنی که اگر دو کیوبیت کنترلی یک باشند، کیوبیت هدف برعکس می‌شود و در غیراینصورت کیوبیت هدف تغییری نمی‌کند. در تمام حالت‌ها نیز کیوبیت‌های کنترلی عوض نمی‌شوند. جدول درستی Toffoli gate در صفحه ۱۵۹ کتاب مرجع اصلی قابل مشاهده است. سعی کنید با بررسی نمایش ماتریسی رفتار آن را دقیق‌تر بررسی کنید. در اسلاید شماره ۱۹ پیاده‌سازی Toffoli gate با استفاده از gateهای تک و دو ورودی را ملاحظه می‌کنید.

لطفاً برای تسلط بیشتر بر موضوعات بخش‌های ۳.۴ و ۴.۴ کتاب مرجع اصلی را مطالعه بفرمایید.