پردازش اطلاعات کوانتومی

پاییز ۱۴۰۲

ارائه ۸ | دکتر احمد خونساری

۱ مقدمه

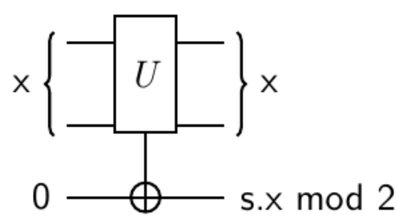
در این ارائه به الگوریتم Bernstein-Vazirani می‌پردازیم که در واقع گسترشی از الگوریتم Deutsch-Josza است که پیش‌تر با آن آشنا شدیم.

۲ الگوریتم Bernstein-Vazirani

در این الگوریتم با یک جعبه سیاه جدید مواجه هستیم که تابع $f_s : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ که به شکل زیر تعریف می‌شود را پیاده‌سازی کرده است:

$$f_s(x) = s.x \mod 2 \tag{۱}$$

در این تعریف s یک رشته ناشناخته است که به صورت بیتی [1] در ورودی (x) ضرب می‌شود (دقت کنید که طول هر دو رشته n است). هدف شناسایی کردن رشته s است. برای پیاده‌سازی معکوس‌پذیر تابع از مداری استفاده می‌شود که در شکل ۱ آمده است. اگر بخواهیم رشته s را در شرایط کلاسیک تشخیص دهیم باید n ورودی را به مدار اعمال

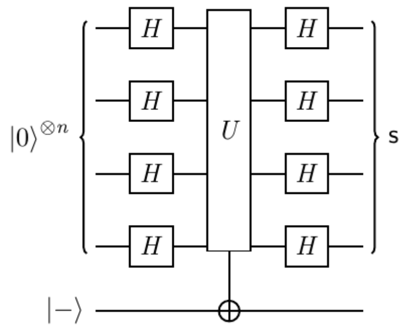


شکل ۱: شکل کلی مداری که در مسئله در نظر گرفته می‌شود

کنیم و خروجی‌های متناظر را ملاحظه کنیم. ورودی i-ام یک رشته است که تمام بیت‌های آن صفر هستند غیر از بیت i-ام که برابر یک است. هر کدام از این ورودی‌ها یک بیت رشته s را مشخص می‌کند. در ادامه روش کوانتومی را بررسی می‌کنیم.

[1] Bitwise

با استفاده از روش‌های کوانتومی می‌توان رشته s را پس از یک بار فراخوانی با صد درصد اطمینان پیدا کرد. برای این کار به صورت زیر عمل می‌شود (شکل ۲ را ببینید):



شکل ۲: مدار الگوریتم Bernstein-Vazirani

۱. بر روی سیم‌های مرتبط با ورودی x مقدار $|0\rangle^{\otimes n}$ را قرار می‌دهیم. بر روی سیم مرتبط با خروجی مقدار $|-\rangle$ را قرار می‌دهیم.

۲. به سیم‌های مرتبط با ورودی با مقدار $|0\rangle^{\otimes n}$ دریچه هادامارد را اعمال می‌کنیم.

۳. جعبه سیاهی که در اختیار داریم را به مقادیر فوق اعمال می‌کنیم.

۴. به سیم‌های مرتبط با x پس از اعمال جعبه سیاه دریچه هادامارد را اعمال می‌کنیم.

۵. سیم‌های مرتبط با x را در پایه‌های محاسباتی اندازه‌گیری می‌کنیم.

برای اینکه ببینیم حاصل گام‌های فوق چیست، ابتدا به خاطر بیاورید که در جلسه قبلی با تساوی زیر آشنا شدیم:

$$H^{\otimes n}|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{z\in\{0,1\}^n} (-1)^{x.z}|z\rangle \tag{۲}$$

به این ترتیب ورودی اولیه جعبه سیاه به صورت زیر است:

$$H^{\otimes n}|0\rangle^{\otimes n} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x\in\{0,1\}^n} |x\rangle \tag{۳}$$

در اینجا جعبه سیاه اعمال می‌شود. توجه کنید که باز هم پدیده Phase Kickback اتفاق می‌افتد (دقت کنید که کیوبیت هدف نیز در حالت $|-\rangle$ قرار دارد). به صورت خاص،

$$f_s \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x\in\{0,1\}^n} |x\rangle|-\rangle = f_s \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x\in\{0,1\}^n} |x\rangle \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \tag{۴}$$

$$= f_s \frac{1}{\sqrt{2^{n+1}}} \sum_{x\in\{0,1\}^n} |x\rangle(|0\rangle - |1\rangle) \tag{۵}$$

اگر حال توجه کنید که اگر حاصل $s.x \mod 2$ صفر باشد (یعنی $s.x$ زوج باشد) کیوبیت هدف تغییر نمی‌کند. اما اگر حاصل یک باشد (یعنی $s.x$ فرد باشد) آنگاه جای $|x0\rangle$ و $|x1\rangle$ عوض می‌شود. حاصل این اتفاق را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:

$$f_s \frac{1}{\sqrt{2^{n+1}}} \sum_{x \in \{0,1\}^n} |x\rangle(|0\rangle - |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2^{n+1}}} \sum_{x \in \{0,1\}^n} (-1)^{s.x}|x\rangle(|0\rangle - |1\rangle) \tag{۶}$$

حال دوباره به معادله (۲) نگاهی بیندازید. ملاحظه می‌کنید که سمت راست معادله (۶) مشابه معادله (۲) است. به این ترتیب مشخص می‌شود که با یکبار دیگر اعمال کردن دریچه‌های هادامارد مقدار s بدست می‌آید (به یاد داشته باشید که دریچه هادامارد معکوس خودش است).

۱.۲ مثال

فرض کنید که s یک رشته دوبیتی است که برابر 11 است. فرض کنید جعبه سیاه تابع $f_s(x) = s.x \mod 2$ نیز در اختیار است. سیم‌های متناظر ورودی را با $H^{\otimes 2}|0\rangle^{\otimes 2}$ مقداردهی می‌کنیم که برابر حالت زیر می‌شود:

$$\frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle). \tag{۷}$$

سیم متناظر خروجی نیز در حالت $|-\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$ قرار دارد. به ازای هر حالت برهم‌نهاده، حاصل اعمال جعبه سیاه به صورت‌های زیر خواهد بود:

$$f_s \frac{1}{2\sqrt{2}}|00\rangle(|0\rangle - |1\rangle) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(-1)^{00.11}|00\rangle(|0\rangle - |1\rangle) = \frac{1}{2\sqrt{2}}|00\rangle(|0\rangle - |1\rangle) \tag{۸}$$

$$f_s \frac{1}{2\sqrt{2}}|01\rangle(|0\rangle - |1\rangle) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(-1)^{01.11}|01\rangle(|0\rangle - |1\rangle) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(-1)|01\rangle(|0\rangle - |1\rangle) \tag{۹}$$

$$f_s \frac{1}{2\sqrt{2}}|10\rangle(|0\rangle - |1\rangle) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(-1)^{10.11}|10\rangle(|0\rangle - |1\rangle) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(-1)|10\rangle(|0\rangle - |1\rangle) \tag{۱۰}$$

$$f_s \frac{1}{2\sqrt{2}}|11\rangle(|0\rangle - |1\rangle) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(-1)^{11.11}|11\rangle(|0\rangle - |1\rangle) = \frac{1}{2\sqrt{2}}|11\rangle(|0\rangle - |1\rangle) \tag{۱۱}$$

بنابراین حالت نهایی به صورت زیر است:

$$\frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle)(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}) \tag{۱۲}$$

اگر دریچه هادامارد را به دو کیوبیت اول اعمال کنیم:

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}\frac{1}{2}(\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}) \tag{۱۳}$$

$$=\frac{1}{4}(\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix})=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}=|11\rangle \tag{۱۴}$$

می‌بینیم که حاصل اندازه‌گیری $|11\rangle$ برابر رشته s است.

۲.۲ شبیه‌سازی

فرض کنید می‌خواهیم مدار کوانتومی الگوریتم Bernstein-Vazirani را برای تابع زیر بسازیم:

$$f(x) = 110.x \mod 2. \tag{۱۵}$$

برای این منظور، ابتدا کدهای مورد نیاز از شبیه‌ساز را فعال می‌کنیم:

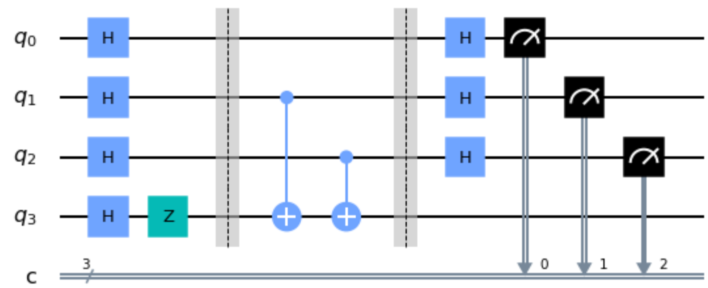
```
from qiskit import BasicAer
from qiskit import QuantumCircuit, execute
from qiskit.visualization import plot_histogram
```

سپس متغیرهای متناظر رشته s و طول آن را مقداردهی می‌کنیم:

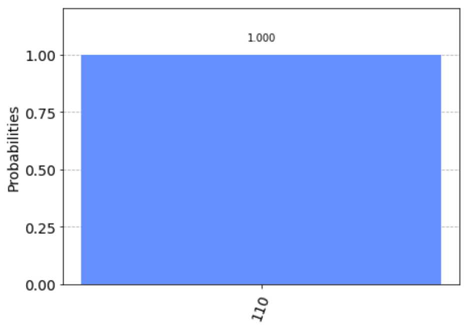
```
s = "110"
n = len(s)
```

سپس مدار کوانتومی را ایجاد می‌کنیم. در این مدار $n+1$ سیم کوانتومی و n سیم کلاسیک برای اندازه‌گیری وجود دارد. دقت کنید که n سیم کوانتومی برای ورودی و یک سیم هم برای خروجی لحاظ شده است. به شکل ۲ نگاه کنید و توجه کنید که در این مدار فقط سیم‌های کوانتومی نمایش داده شده‌اند. همانطور که توضیح داده شد، سیم کوانتومی آخر در حالت $|-\rangle$ قرار می‌گیرد و n سیم کوانتومی اول نیز در حالت برهم‌نهاده قرار می‌گیرند:

```
bv_circuit = QuantumCircuit(n+1, n)
bv_circuit.h(n)
bv_circuit.z(n)
for i in range(n):
    bv_circuit.h(i)
```



(آ) مدار تابع متناظر رشته 110



(ب) هیستوگرام نتیجه اندازه‌گیری

شکل ۳: شبیه‌سازی تابع متناظر رشته 110

حال باید تابع f را پیاده‌سازی کنیم. توجه کنید که طبق تعریف، هر کدام از کیوبیت‌های ورودی در حالت $|1\rangle$ باشد باعث می‌شود که سیم کوانتومی خروجی به پیمانه ۲ یک واحد افزایش پیدا کند که این عملیات در واقع معادل NOT کنترل‌شده است (در این مورد بیشتر فکر کنید). بنابراین، به ازای هر بیت یک در s یک بار عمل NOT کنترل‌شده را به مدار اضافه می‌کنیم. توجه کنید که کاراکتر اول رشته s (اندیس صفر) نشان‌دهنده کیوبیت n-ام است. بنابراین نیازمند این هستیم که رشته s را برعکس کنیم (در واقع این امر از تفاوت ترتیب در رشته‌ها در زبان پایتون و ترتیب کیوبیت‌ها در شبیه‌ساز ناشی می‌شود).

```
s_rev = s[::-1]
for q in range(n):
    if s_rev[q] == '1':
        bv_circuit.cx(q, n)
```

سپس، به n سیم کوانتومی اول دریچه هادامارد را اعمال می‌کنیم و سپس آن‌ها را اندازه‌گیری می‌کنیم:

```
for i in range(n):
    bv_circuit.h(i)
for i in range(n):
    bv_circuit.measure(i, i)
```

حاصل نهایی در شکل ۳آ نشان داده شده است. به وسیله دستورات زیر می‌توانیم ۱۰۰۰ بار این مدار را راه‌اندازی و اندازه‌گیری کنیم:

```
shots = 1000
backend = BasicAer.get_backend('qasm_simulator')
results = execute(bv_circuit, backend=backend, shots=shots).result()
answer = results.get_counts()
```

هیستوگرام نتایج اندازه‌گیری در شکل ۳ب آمده است. ملاحظه می‌کنید که در صد درصد مواقع خروجی 110 مشاهده شده است که در واقع همان رشته s را نشان می‌دهد.